УДК 517.929.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

канд. физ.-мат. наук, доц. И.Б. СОРОГОВЕЦ, О.Н. МЕДВЕДЕВА
(Полоцкий государственный университет)

Представлено обоснование метода Фурье для решения краевых задач теплопроводности в случае двухслойного полого цилиндра. Рассмотрено девять задач на собственные значения и собственные функции типа Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами. Методом разделения переменных найдены решения однородных задач. Каждая задача приведена к интегральному уравнению с симметричным ядром. Решения неоднородных задач получены в виде рядов Фурье по системам собственных функций рассматриваемых задач.

Ключевые слова: *двухслойное тело, температура, метод разделения переменных.*

Постановка задачи. Полый цилиндр большой длины (бесконечный полый цилиндр) с внутренним радиусом R_0 и внешним R_1 окружен оболочкой толщиной $H = R - R_1$, где R – внешний радиус оболочки. Теплофизические характеристики полого цилиндра и оболочки считаем различными: λ_1, c_1, ρ_1; λ_2, c_2, ρ_2 Здесь c – теплоемкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, индекс 1 относится к полому цилиндру, индекс 2 – к оболочке. Найти распределение температуры в системе двух цилиндрических тел, которая будет зависеть от начальной температуры и от способа взаимодействия системы с окружающей средой. Предполагается, что температурное поле в системе тел радиальное, т. е. не зависит от полярного угла φ и координаты z. Температуру полого цилиндра обозначаем $T_1(r,t)$ (t – время), температуру оболочки – $T_2(r,t)$. Внутри полого цилиндра и оболочки могут быть источники тепла $w_1(r,t)$, $w_2(r,t)$ – количество тепла, выделяемого в единице объема в единицу времени.

В общем случае задача определения температуры указанных цилиндрических тел может быть задана в виде системы, включающей в себя два уравнения теплопроводности, начальные условия, условия сопряжения температур, граничные условия. Граничные условия должны задаваться на внутренней поверхности $r = R_0$ и на внешней – $r = R$. Для удобства введем безразмерные величины

$$x = \frac{r}{R},\quad x_0 = \frac{R_0}{R},\quad x_1 = \frac{R_1}{R},\quad a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1\rho_1},\quad a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2},\quad K_a^2 = \frac{a_1}{a_2},\quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},\quad F = \frac{a_2 t}{R^2}.$$

Тогда система соотношений для определения температуры запишется в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial F} = K_a^2\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + W_1(x,F) \quad \left(F > 0,\ x_0 \le x \le x_1,\ W_1(x,F) = \frac{w_1(r,t)R^2}{a_2 c_1 \rho_1}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial F} = \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial T_2}{\partial x}\right) + W_2(x,F) \quad \left(F > 0,\ x_1 \le x \le 1,\ W_2(x,F) = \frac{w_2(r,t)R^2}{a_2 c_2 \rho_2}\right); \tag{2}$$

начальное условие

$$T(x,0) = f(x),\ T(x,0) = \left\{\begin{matrix} T_1(x,0) = f_1(x)\ \left(x_0 \le x \le x_1\right), \\ T_2(x,0) = f_2(x)\ \left(x_1 \le x \le 1\right), \end{matrix}\ f_1(x_1) = f_2(x_1)\right\}; \tag{3}$$

условия сопряжения

$$T_1(x_1,F) = T_2(x_1,F); \qquad K_\lambda \frac{\partial T_1(x_1,F)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(x_1,F)}{\partial x}; \tag{4}$$

граничные условия

$$\beta_1 \frac{\partial T_1(x_0,F)}{\partial x} - \alpha_1 T_1(x_0,F) = \varphi_1(F); \quad \beta_2 \frac{\partial T_2(1,F)}{\partial x} + \alpha_2 T_2(1,F) = \varphi_2(F). \tag{5}$$

Варьируя значения констант β_1, α_1, β_2, α_2 в формулах (5), можно получить при $x = x_0$ и при $x = 1$ три вида граничных условий: первого, второго и третьего рода. Всего получим девять различных задач, которые можно охарактеризовать как задачи ($i - j$) (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3). Это означает, что в формулах (5) при $x = x_0$ задано граничное условие i-го рода, а при $x = 1$ задано граничное условие j-го рода.

Судя по публикациям [1–5], основным методом решения задач теплопроводности для многослойных тел является метод интегральных преобразований. Этот метод имеет один недостаток: после получения решения задачи теплопроводности в изображениях не всегда удается элементарными методами вернуться к оригиналам. В [6, 7] задачи теплопроводности двухслойных тел решались методом разделения переменных. Обоснование метода разделения переменных приводит к задачам Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами. В данной работе метод разделения переменных применяется для определения температурных полей двухслойного полого цилиндра.

Метод разделения переменных при решении однородных задач.

Предварительно рассмотрим случай, когда в формулах (1)–(5)

$$W_1(x,F) = 0; \; W_2(x,F) = 0; \; \varphi_1(F) = 0; \; \varphi_2(F) = 0 .$$

Решения уравнений (1) и (2) будем искать в виде произведения функций, т. е.

$$T_k(x,F) = U_k(F) \cdot V_k(x) \;\; (k = 1,2). \tag{6}$$

Подставляя выражения (6) в уравнения (1) и (2), после разделения переменных и решения получаемых уравнений, находим

$$V_1(x) = A_1 J0\left(\frac{\mu_1}{K_a} x\right) + B_1 Y0\left(\frac{\mu_1}{K_a} x\right), \;\; V_2(x) = A_2 J0(\mu_2 x) + B_2 Y0(\mu_2 x), \quad U_k(F) = \exp(-\mu_k^2 F), \tag{7}$$

где $J0(x)$ и $Y0(x)$ – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно [1].

Далее будут использоваться также функции $J1(x) = -J0^{/}(x)$ и $Y1(x) = -Y0^{/}(x)$ – бесселевы функции первого порядка первого и второго рода соответственно. Как видно, решения (7) зависят от шести постоянных $\mu_1, \mu_2, A_1, A_2, B_1, B_2$, которые находятся из условий (4), (5). Чтобы первое из условий сопряжения (4) выполнялось при любых $F > 0$, должно быть $\mu_1 = \mu_2$, что приводит к равенству

$$J0\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) A_1 + Y0\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) B_1 - J0(\mu x_1) A_2 - Y0(\mu x_1) B_2 = 0 . \tag{8}$$

Второе из условий (4) можно записать в виде

$$K_\lambda \mu \left(J1\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) A_1 + Y1\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) B_1 \right) - \mu K_a \left(J1(\mu x_1) A_2 + Y1(\mu x_1) B_2 \right) = 0 . \tag{9}$$

Из граничных условий (5) получаем еще два соотношения:

$$\left(\frac{\beta_1 \mu}{K_a} J1\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) - \alpha_1 J0\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) \right) A_1 + \left(\frac{\beta_1 \mu}{K_a} Y1\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) - \alpha_1 Y0\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) \right) B_1 = 0 , \tag{10}$$

$$\left(\beta_2 \mu J1(\mu) + \alpha_2 J0(\mu) \right) A_2 + \left(\beta_2 \mu Y1(\mu) + \alpha_2 Y0(\mu) \right) B_2 = 0 . \tag{11}$$

Получена система 4-х линейных однородных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 и числа μ. Чтобы система (8)–(11) имела ненулевые решения, ее определитель $\Delta(\mu)$ должен равняться нулю.

Выпишем выражение $\Delta(\mu)$, для чего введем новые обозначения:

$$\left\{\begin{array}{l} J0\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_0\right)=J_{00},\, Y0\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_0\right)=Y_{00},\, J0\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_1\right)=J_{01},\, Y0\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_1\right)=Y_{01},\, J0(\mu x_1)=J_{02},\, Y0(\mu x_1)=Y_{02},\\ J0(\mu)=J_{03},\; Y0(\mu)=Y_{03},\; J1\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_0\right)=J_{10},\; Y1\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_0\right)=Y_{10},\; J1\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_1\right)=J_{11},\; Y1\left(\dfrac{\mu}{K_a}x_1\right)=Y_{11},\\ J1(\mu x_1)=J_{12},\; Y1(\mu x_1)=Y_{12},\; J1(\mu)=J_{13},\; Y1(\mu)=Y_{13}. \end{array}\right\} \quad (12)$$

В этих обозначениях

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix} J_{01} & Y_{01} & -J_{02} & -Y_{02}\\ \mu K_\lambda J_{11} & \mu K_\lambda Y_{11} & -\mu K_a J_{12} & -\mu K_a Y_{12}\\ \dfrac{\beta_1\mu}{K_a}J_{10}-\alpha_1 J_{00} & \dfrac{\beta_1\mu}{K_a}Y_{10}-\alpha_1 Y_{00} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta_2\mu J_{13}+\alpha_2 J_{03} & \beta_2\mu Y_{13}+\alpha_2 Y_{03} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Уравнение $\Delta(\mu)=0$ называют характеристическим уравнением, а его решения – характеристическими числами или собственными значениями (если при этих значениях система (8)–(11) имеет ненулевые решения). Отметим, что число $\mu=0$ является корнем определителя (13) для каждой задачи. Ниже будет показано, что число $\mu=0$ будет собственным значением только для задачи (2–2). Соответствующей собственной функцией будет $T(x,F)=1$ $(x\in[x_0,1],\ F\ge 0)$. В связи с этим характеристическое число $\mu=0$ больше рассматриваться не будет. При этом вторую строку определителя (13) сократим на μ, а в задачах $(i-j)$ при $i=2$ или $j=2$ сократим на μ третью или четвертую строки.

Далее будет показано, что для каждой задачи множество собственных значений счетно, собственные значения неотрицательны, просты и их можно перенумеровать $0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_k<\ldots$.

Для задачи (2–2) добавляется собственное значение $\mu_0=0$. Решения системы (8)–(11) будут зависеть от собственных чисел μ_k, и мы будем обозначать их как $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$. Займемся теперь решением системы (8)–(11). Будем считать, что уравнение (9) сокращено на μ.

Предварительно введем некоторые преобразования определителя (13), в котором μ заменено на μ_k и вторая строка не содержит множителя μ_k. К первой строке прибавим третью и четвертую, помноженные соответственно на $\dfrac{-Y_{01}}{\dfrac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10}-\alpha_1 Y_{00}}$ и $\dfrac{Y_{02}}{\beta_2\mu_k Y_{13}+\alpha_2 Y_{03}}$, ко второй строке прибавим третью и четвертую, помноженные соответственно на $\dfrac{-K_\lambda Y_{11}}{\dfrac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10}-\alpha_1 Y_{00}}$ и $\dfrac{K_a Y_{12}}{\beta_2\mu_k Y_{13}+\alpha_2 Y_{03}}$. Получим определитель, которому соответствует система, равносильная (8)–(11). Введем замены $A_{1,k}=\left(\dfrac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10}-\alpha_1 Y_{00}\right)C_{1,k}$, $A_{2,k}=\left(\beta_2\mu_k Y_{13}+\alpha_2 Y_{03}\right)C_{2,k}$. Тогда $B_{1,k}=-\left(\dfrac{\beta_1\mu_k}{K_a}J_{10}-\alpha_1 J_{00}\right)C_{1,k}$, $B_{2,k}=-\left(\beta_2\mu_k J_{13}+\alpha_2 J_{03}\right)C_{2,k}$.

Для $C_{1,k}, C_{2,k}$ получаем следующие выражения:

$$C_{1,k}=\left(J_{02}\left(\beta_2\mu_k Y_{13}+\alpha_2 Y_{03}\right)-Y_{02}\left(\beta_2\mu_k J_{13}+\alpha_2 J_{03}\right)\right)D_k,$$

$$C_{2,k}=\left(J_{01}\left(\dfrac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10}-\alpha_1 Y_{00}\right)-Y_{01}\left(\dfrac{\beta_1\mu_k}{K_a}J_{10}-\alpha_1 J_{00}\right)\right)D_k,$$

где D_k – произвольные постоянные.

Выпишем окончательные выражения для коэффициентов $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$:

$$\left.\begin{aligned} A_{1,k} &= \left(\frac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10} - \alpha_1 Y_{00}\right)\left(J_{02}\left(\beta_2\mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03}\right) - Y_{02}\left(\beta_2\mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03}\right)\right)D_k, \\ B_{1,k} &= -\left(\frac{\beta_1\mu_k}{K_a}J_{10} - \alpha_1 J_{00}\right)\left(J_{02}\left(\beta_2\mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03}\right) - Y_{02}\left(\beta_2\mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03}\right)\right)D_k, \\ A_{2,k} &= \left(\beta_2\mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03}\right)\left(J_{01}\left(\frac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10} - \alpha_1 Y_{00}\right) - Y_{01}\left(\frac{\beta_1\mu_k}{K_a}J_{10} - \alpha_1 J_{00}\right)\right)D_k, \\ B_{2,k} &= -\left(\beta_2\mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03}\right)\left(J_{01}\left(\frac{\beta_1\mu_k}{K_a}Y_{10} - \alpha_1 Y_{00}\right) - Y_{01}\left(\frac{\beta_1\mu_k}{K_a}J_{10} - \alpha_1 J_{00}\right)\right)D_k. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Формулы (14) записаны в обозначениях (12), т. е. J – функция Бесселя первого рода, Y – функция Бесселя второго рода, первый индекс – порядок функции Бесселя, второй индекс – номер значения, при котором вычисляется функция Бесселя: 0 – $\left(\frac{\mu_k}{K_a}x_0\right)$; 1 – $\left(\frac{\mu_k}{K_a}x_1\right)$; 2 – $\left(\mu_k x_1\right)$; 3 – $\left(\mu_k\right)$.

Таким образом, найдено множество решений задач (1)–(5) без учета начального условия (3) при $W_1(x,F)=0,\ W_2(x,F)=0,\ \varphi_1(F)=0,\ \varphi_2(F)=0$ (однородный случай):

$$T_k(x,F) = \begin{cases} T_{1,k}(x,F) = \left(A_{1,k}J0\left(\frac{\mu_k}{K_a}x\right) + B_{1,k}Y0\left(\frac{\mu_k}{K_a}x\right)\right)\exp(-\mu_k^2 F)\ (x\in[x_0,x_1]), \\ T_{2,k}(x,F) = \left(A_{2,k}J0\left(\mu_k x\right) + B_{2,k}Y0\left(\mu_k x\right)\right)\exp(-\mu_k^2 F)\ (x\in[x_1,1]), \end{cases} \quad k=1,2,\dots, \quad (15)$$

где $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$ – коэффициенты, определяемые по формулам (14); μ_k – корни характеристического уравнения $\Delta(\mu)=0$, здесь $\Delta(\mu)$ – определитель (13).

Свойства решений однородных задач.

Будем предполагать, что в (1)–(5) $W_1(x,F)=0,\ W_2(x,F)=0,\ \varphi_1(F)=0,\ \varphi_2(F)=0$. Запишем уравнения (1) и (2) в виде одного уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial F} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad p(x) = \begin{cases} K_a^2 x\ (x\in[x_0,x_1]), \\ x\ (x\in[x_1,1]). \end{cases} \quad (16)$$

Функции (15), удовлетворяющие этому уравнению, запишем в виде

$$T_k(x,F) = V_k(x)\cdot\exp(-\mu_k^2 F),\ V_k(x) = \begin{cases} V_{1,k}(x) = A_{1,k}J0\left(\frac{\mu_k}{K_a}x\right) + B_{1,k}Y0\left(\frac{\mu_k}{K_a}x\right)\ (x\in[x_0,x_1]), \\ V_{2,k}(x) = A_{2,k}J0\left(\mu_k x\right) + B_{2,k}Y0\left(\mu_k x\right)\ (x\in[x_1,1]), \end{cases} \quad k=1,2,\dots. \quad (17)$$

Подставляя выражения (17) в уравнение (16) и сокращая на $\exp(-\mu_k^2 F)$, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $V_k(x)$:

$$l(V_k(x)) = -\frac{1}{x}\left(p(x)V_k^{/}(x)\right)^{/} = \mu_k^2 V_k(x). \quad (18)$$

Иначе говоря, функции $V_k(x)$ являются собственными функциями дифференциального оператора L, порожденного дифференциальным выражением $l\left(V_k(x)\right)$ в (18), условиями сопряжения (4) и граничными условиями (5). Мы пришли, таким образом, к задаче на собственные значения для дифференциального оператора L. В классическом случае, когда $p(x)$ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0;1]$ функция и $p(x)>0$, эту задачу называют задачей Штурма – Лиувилля. В данном случае получено обобщение задачи Штурма – Лиувилля в том смысле, что функция $p(x)$ терпит разрыв первого рода во внутренней точке отрезка $[x_0;1]$, но при этом добавляются два условия (4) в точке разрыва.

Основной метод исследования в классической задаче Штурма – Лиувилля – приведение этой задачи к интегральному уравнению путем построения функции Грина [8]. В данном случае будем поступать аналогично. Предварительно рассмотрим задачу о том, будет ли число $\mu=0$ собственным значением оператора L. Для этого рассмотрим однородное уравнение $l(U)=0$ при условиях (4) и его решение

$$-\frac{1}{x}\Big(p(x)U^{/}\Big)^{/}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}K_\lambda U^{/}(x_1-0)=U^{/}(x_1+0)\\ U(x_1-0)=U(x_1+0)\end{bmatrix}\Rightarrow U(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{K_a^2}\ln x+b & \big(x\in[x_0;x_1]\big),\\ \dfrac{K_\lambda a}{K_a^2}\ln\dfrac{x}{x_1}+\dfrac{a}{K_a^2}\ln x_1+b & \big(x\in[x_1;1]\big),\end{cases} \tag{19}$$

где a и b – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь задачу (2–2) с граничными условиями $U^{/}(x_0)=0,\ U^{/}(1)=0$. Оба эти условия выполнены при $a=0$. Из решения (19) следует, что для задачи (2–2) число $\mu=0$ является собственным значением с соответствующей собственной функцией $U(x)=b\ \big(x\in[x_0;1]\big)$.

Легко показать, что для других задач попытка удовлетворить граничным условиям приводит к равенствам $a=0, b=0$, т. е. для всех остальных задач число $\mu=0$ не является собственным значением.

Теперь будем строить функции Грина для всех задач, кроме задачи (2–2). Для этого воспользуемся методом [8], согласно которому решение неоднородного уравнения

$$l(U)=-\frac{1}{x}\Big(p(x)U^{/}\Big)^{/}=f(x) \tag{20}$$

будет найдено с помощью метода вариации произвольных постоянных. Сначала находим два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения (19) при условиях (4), одно из которых $U_0(x)$ удовлетворяет граничному условию при $x=x_0$, а другое $U_1(x)$ – при $x=1$. Построим указанные решения для каждой из восьми задач, воспользовавшись выражениями (19). Предварительно отметим, что при фиксированном *i* для всех задач (*i* – *j*) функция $U_0(x)$ будет одной и той же, а при фиксированном *j* такой будет функция $U_1(x)$. Таким образом, всего нужно построить три функции вида $U_0(x)$ и три функции вида $U_1(x)$. Выпишем их

$$i=2,\ U_0^{/}(x_0)=0,\qquad j=2,\ U_1^{/}(1)=0,$$
$$U_0(x)=1,\ \big(x\in[x_0,1]\big);\qquad U_1(x)=1,\ \ x\in[x_0,1]; \tag{21}$$

$$i=1,\ U_0(x_0)=0,\qquad i=3,\ U_0^{/}(x_0)-Bi_1U_0(x_0)=0,\ Bi_1=\alpha_1/\beta_1,$$

$$U_0(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x}{x_0} & \big(x\in[x_0;x_1]\big),\\ K_\lambda\ln\dfrac{x}{x_1}+\ln\dfrac{x_1}{x_0} & \big(x\in[x_1;1]\big);\end{cases}\qquad U_0(x)=\begin{cases}\left(\ln\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{1}{x_0Bi_1}\right) & \big(x\in[x_0;x_1]\big),\\ K_\lambda\ln\dfrac{x}{x_1}+\ln\dfrac{x_1}{x_0}+\dfrac{1}{x_0Bi_1} & \big(x\in[x_1;1]\big);\end{cases} \tag{22}$$

$$j=1,\ U_1(1)=0,\qquad j=3,\ U_1^{/}(1)+Bi_2U_1(1)=0,\ Bi_2=\alpha_2/\beta_2,$$

$$U_1(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x}{x_1}+K_\lambda\ln x_1 & \big(x\in[x_0;x_1]\big),\\ K_\lambda\ln x & \big(x\in[x_1;1]\big);\end{cases}\qquad U_1(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x}{x_1}+K_\lambda\left(\ln x_1-\dfrac{1}{Bi_2}\right) & \big(x\in[x_0;x_1]\big),\\ K_\lambda\left(\ln x-\dfrac{1}{Bi_2}\right) & \big(x\in[x_1;1]\big).\end{cases} \tag{23}$$

С помощью формул (21)–(23) легко подобрать функции $U_0(x)$ и $U_1(x)$ для каждой из задач. Например, для задачи (2–3) выбор осуществляем следующим образом: $i = 2$ и по формуле (21) $U_0(x) = 1$ при $x \in [x_0; 1]$; $j = 3$ и по второй из формул (23)

$$U_1(x) = \begin{cases} \ln\frac{x}{x_1} + K_\lambda\left(\ln x_1 - \frac{1}{Bi_2}\right) & \left(x \in [x_0; x_1]\right), \\ K_\lambda\left(\ln x - \frac{1}{Bi_2}\right) & \left(x \in [x_1; 1]\right). \end{cases}$$

Далее, по методу вариации произвольных постоянных строим решение уравнения (20):

$$U(x) = C_0(x)U_0(x) + C_1(x)U_1(x) \Rightarrow \begin{cases} C_0^{/}U_0 + C_1^{/}U_1 = 0 \\ C_0^{/}U_0^{/} + C_1^{/}U_1^{/} = -\frac{x}{p(x)}f(x) \end{cases} \Rightarrow C_0^{/} = \frac{xU_1(x)}{w\cdot p}f(x),\ C_1^{/} = -\frac{xU_0(x)}{w\cdot p}f(x).$$

В этих формулах $w = w(x)$ – вронскиан функций $U_0(x), U_1(x)$. Легко показать, что для всех задач $w(x)\cdot p(x) = w\cdot p$ – кусочно-постоянная на отрезке $[x_0; 1]$ функция. Интегрируя, находим

$$U(x) = -\left(U_0(x)\int_x^1 \frac{y\,f(y)U_1(y)}{w\cdot p}dy + U_1(x)\int_{x_0}^x \frac{y\,f(y)U_0(y)}{w\cdot p}dy\right) = \int_{x_0}^1 yG(x,y)f(y)dy. \quad (24)$$

Пределы интегрирования выбирались таким образом, чтобы $C_0(1) = 0$ и $C_1(x_0) = 0$. При таком выборе пределов функция $U(x)$ будет удовлетворять граничным условиям. В последнем интеграле $G(x, y)$ – функция Грина дифференциального оператора L. Ее выражение

$$G(x,y) = -\frac{1}{w\cdot p}\begin{cases} U_0(x)U_1(y), & x_0 \le x \le y, \\ U_1(x)U_0(y), & y \le x \le 1. \end{cases} \quad (25)$$

Легко видеть, что функция Грина симметрична, т. е. $G(x, y) = G(y, x)$. Эта функция обладает и некоторыми другими свойствами, которые приведены в [8, 9].

С помощью функции Грина каждая из восьми задач на собственные значения для дифференциального оператора L сводится к задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$V(x) = \mu\int_{x_0}^1 yG(x,y)V(y)dy. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь задачу (2–2), для которой число $\mu = 0$ является собственным значением. Чтобы избавиться от этого условия, введем дифференциальный оператор L_1, порожденный дифференциальным выражением $l_1(U) = l(U) + U$ и граничными условиями задачи (2–2). Общее решение однородного уравнения $l_1(U) = 0$ можно представить в виде

$$U(x) = \begin{cases} U_0(x) & \left(x \in [x_0; x_1]\right), \\ U_1(x) & \left(x \in [x_1; 1]\right) \end{cases} \quad U_0(x) = a_0 I0\left(\frac{x}{K_a}\right) + b_0 K0\left(\frac{x}{K_a}\right), \quad U_1(x) = a_1 I0(x) + b_1 K0(x),$$

где $I0(x)$ и $K0(x)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно [1].

Для построения каждой из функций $U_0(x)$ и $U_1(x)$ получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными: a_0, b_0, a_1, b_1. После построения функций $U_0(x)$, $U_1(x)$ и применения формул

(24) и (25) задача на собственные значения для дифференциального оператора L сводится к интегральному уравнению (26), в котором μ следует заменить на $\mu+1$.

Легко показать, что функция $U(x)$, определенная формулой (24), удовлетворяет условиям сопряжения (4). Этот факт указывает на то, что собственные функции интегрального уравнения (26) удовлетворяют условиям сопряжения. Выпишем теперь основные свойства собственных значений оператора L и его собственных функций $V_k(x)$, являющихся одновременно и собственными функциями интегрального уравнения (26) [8, 9].

1. Собственные значения неотрицательные, простые и их множество счетно.

2. Собственные функции $\{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют полную ортогональную систему функций.

3. Всякая истокообразно представимая через ядро функция разлагается в ряд Фурье по этой системе.

Методы построения решений неоднородных задач.

а) Пусть в системе соотношений (1)–(5) $W_1(x,F)=W_2(x,F)=0,\ \varphi_1(F)=\varphi_2(F)=0,\ f(x)\neq 0$. Решение в этом случае обозначим $T_f(x,F)$. Предполагая, что $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по системе (6), получаем

$$T_f(x,F)=\sum_{k=1}^{\infty} D_k\cdot V_k(x)\cdot\exp(-\mu_k^2\cdot F),\quad D_k=\frac{1}{\|V_k\|^2}\int_{x_0}^{1} f(x)V_k(x)x\,dx,\quad \|V_k\|^2=\int_{x_0}^{1} V_k^2(x)x dx.$$

б) Пусть в системе соотношений (1)–(5) $\varphi_1(F)=\varphi_2(F)=f(x)=0,\ W_i(x,F)\neq 0\ \ (i=1,2)$. Положим $W(x,F)=W_1(x,F)$ при $x\in[x_0;x_1]$, $W(x,F)=W_2(x,F)$ при $x\in[x_1;1]$. Полагая, что при каждом $F>0$ функция $W(x,F)$ разлагается в ряд Фурье по системе $\{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. $W(x,F)=\sum_{k=1}^{\infty} W_k(F)\cdot V_k(x)$, решения задач в рассматриваемом случае будем искать в виде $T_W(x,F)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k(F)\cdot V_k(x)\quad \left(B_k(0)=0\right)$. Для $B_k(F)$ получаем $B_k(F)=\int_0^F \exp\left(\mu_k^2(t-F)\right)W_k(t)dt$, т. е. решение $T_W(x,F)$ построено.

в) При $\varphi_1(F)=\varphi_2(F)=0,\ f(x)\neq 0,\ W(x,F)\neq 0$ решением задач будет сумма $T_f(x,F)+T_W(x,F)$.

г) В общем случае легко подобрать функцию $U(x,F)$, удовлетворяющую только граничным условиям. Тогда решение задач можно найти в виде суммы трех слагаемых: $T(x,F)=T1(x,F)+T2(x,F)+U(x,F)$. Здесь $T1(x,F)$ – решение типа а) в котором $f(x)\to f(x)-U(x,0)$; $T2(x,F)$ – решение типа б) в котором

$$W(x,F)\to W(x,F)+H(x,F),\qquad H(x,F)=\begin{cases} H_1(x,F)=K_a^2(U''_{xx}+x^{-1}U'_x)-U'_F & (x_0\le x\le x_1),\\ H_2(x,F)=U''_{xx}+x^{-1}U'_x-U'_F & (x_1\le x\le 1).\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Жук, И. П. Теплотехнический расчет наружных ограждений / И. П. Жук, Л. П. Минченкова. – Минск : Наука и техника, 1975. – 104 с.
3. Ильченко, О. Т. Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена / О. Т. Ильченко // Инженерно-физическкий журнал. – 1970. – Т. 19, № 6. – С. 1094–1099.
4. Павловский, Г. И. Теплопроводность в двухслойной пластине при граничных условиях III рода / Г. И. Павловский // Инженерно-физическкий журнал, 1962. – Т. 5, № 4. – С. 86–88.
5. Смирнов, М. С. Температурное поле в трехслойной стенке при граничных условиях четвертого рода / М. С. Смирнов // В кн. Тепло-и массообмен в каплярно-пористых телах. – М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1957. – С. 17–20.

6. Сороговец, И. Б. Моделирование температурных полей двухслойных тел / И. Б. Сороговец, С. А. Шлапаков // Материалы международной научной конференции MCIT // Гродно, 2008. – Ч. 2. – С. 261–265.
7. Вакульчик, В. С. Разложение по собственным функциям, связанным с краевыми задачами теплопроводности для двухслойных тел / В. С. Вакульчик, И. Б. Сороговец, С. А. Шлапаков // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2009. – № 3. – С. 87–91.
8. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М., 1971.
9. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М., 1966.

Поступила 19.09.2017

SIMULATION OF TEMPERATURE FIELDS OF TWO-LAYER A HOLLOW CYLINDER BY THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES

I. SOROGOVETS, O. MEDVEDEVA

In this work, for solving boundary-value problems of heat conduction in the case of double-layered hollow cylinder, the justification is given of the Fourier method. Considered nine tasks on their own values and eigen functions of the Sturm–Lowville problem with discontinuous coefficients. By separation of variables of the solution of homogeneous problems. Each task, refer to the integral equation with symmetric kernel. Solutions of the inhomogeneous tasks received in the form of Fourier series by systems of eigen functions of the considered problems.

Keywords: *two-layer body temperature, the method of separation of variables.*